ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN THỊ TRANG

TOÁN TỬ SAI PHÂN VÀ ỨNG DỤNG VÀO GIẢI TOÁN SƠ CẤP

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2019

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN THỊ TRANG

TOÁN TỬ SAI PHÂN VÀ ỨNG DỤNG VÀO GIẢI TOÁN SƠ CẤP

Chuyên ngành: Phương pháp Toán sơ cấp
Mã số: 8 46 01 13

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
PGS. TS. Trịnh Thanh Hải

THÁI NGUYÊN - 2019

Lời cảm ơn

Luận văn này được hoàn thành tại trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên. Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đối với PGS.TS. Trịnh Thanh Hải (ĐHKH - ĐHTN), thầy đã trực tiếp hướng dẫn tận tình và động viên tác giả trong suốt thời gian nghiên cứu vừa qua.

Xin chân thành cảm ơn tới các quý thầy, cô giáo đã trực tiếp giảng dạy lớp Cao học Toán K11, các bạn học viên, và các bạn đồng nghiệm đã tạo điều kiện thuận lợi, động viên giúp đỡ tác giả trong quá trình học tập và nghiên cứu tại trường. Tác giả cũng xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới gia đình và người thân luôn khuyến khích động viên tác giả trong suốt quá trình học cao học và viết luận văn này.

Mặc dù có nhiều cố gắng nhưng luận văn khó tránh khỏi những thiếu sót và hạn chế. Tác giả mong nhận được những ý kiến đóng góp của các thầy cô và các bạn đọc để luận văn được hoàn thiện hơn.

Xin chân thành cảm ơn!

Thái Nguyên, tháng 4 năm 2019

Tác giả

Nguyễn Thị Trang

Mục lục

Mở đầu

Toán tử sai phân cho ta nhiều lời giải thú vị khi ta dựa vào định nghĩa, tính chất của toán tử sai phân để giải quyết một số bài toán sơ cấp, đơn cử:

- Bài toán chia hết, phần nguyên;
- Bài toán đếm của giải tích tổ hợp;
- Bài toán về giới hạn hàm số;
- Bài toán về bất đẳng thức;
- Tính tổng của một dãy số;
- Xác định số hạng tổng quát của một dãy số.

Ngoài việc vận dụng phương pháp sai phân vào các dạng bài toán kể trên, ta còn có thể tìm thấy rất nhiều ví dụ minh họa việc vận dụng phương pháp sai phân vào giải các bài toán thực tiễn.

Với mong muốn tìm hiểu, sưu tầm việc vận dụng toán tử sai phân vào giải một số bài toán dành cho học sinh giỏi THPT để vận dụng vào quá trình dạy học của bản thân, Em đã lựa chọn đề tài về ứng dụng toán tử sai phân vào giải một số bài toán sơ cấp. Luận văn có các nhiệm vụ chính sau:

- Tìm hiểu về định nghĩa và các tính chất của toán tử sai phân;
- Đọc hiểu ý tưởng vận dụng toán tử sai phân vào giải môt số bài toán sơ cấp được trình bày trong bài báo [5], [6].
- Sưu tầm một số bài toán, đề thi tổ hợp dành cho học sinh giỏi mà những bài tập đó có thể giải bằng cách vận dụng khái niệm, tính chất của toán tử sai phân;

- Trình bày tường minh lời giải một số bài toán trên cơ sở vận dụng khái niệm, tính chất của toán tử sai phân.

Ngoài ra, luận văn cũng trình bày các cách giải khác nhau của cùng một bài toán và so sánh những phương pháp giải với lời giải khi ứng dụng tính chất của toán tử sai phân đó người đọc có thể đưa ra nhận xét, so sánh giữa các lời giải với nhau.

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

Chương 1 được chúng tôi sử dụng để nhắc lại các kiến thức thường được trình bày trong các giáo trình giảng dạy ở bậc đại học. Nội dung chương 1 được chúng tôi tham khảo từ các tài liệu [4] - [7].

1.1 Một số khái niệm cơ bản

Định nghĩa 1.1.1. [5]. Cho h là một số thực khác 0 và hàm $f(x)$. Khi $f(x+h)$ và $f(x)$ là các số thực, ta gọi

$$\Delta_h f(x) = f(x+h) - f(x)$$

là sai phân bậc nhất của f tại x với bước nhảy h. Cho các hàm f, g và số thực c, ta có

$$\Delta_h(f+g) = \Delta_h f(x) + \Delta_h g(x)$$

và

$$\Delta_h(cf(x)) = c\Delta_h f(x).$$

Ký hiệu $\Delta_h^0 f(x)$ hoặc $If(x)$ thay cho $f(x)$.

Với bất kỳ số nguyên $n \geqslant 1$, chúng ta định nghĩa sai phân bậc n bởi

$$\Delta_h^n f(x) = \Delta^n(\Delta_h^{n-1} f)(x).$$

Ví dụ

$$\Delta_h^2 f(x) = f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x),$$

$$\Delta_h^3 f(x) = f(x+3h) - 3f(x+2h) + 3f(x+h) - f(x).$$

Bằng quy nạp, chúng ta có thể chứng minh được

$$\Delta_h^n f(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} C_n^k f(x+kh), \tag{1.1}$$

trong đó $C_n^0 = 1$. Với $k > 0$, ta có

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)...(n-k)}{k!}.$$

Chú ý rằng với nhiều công thức, chúng ta có thể cho n là các số thực.

Nếu $h = 1$ ta viết Δ và bỏ qua chỉ số dưới h. Ví dụ, trong trường hợp một dãy $\{x_n\}$, chúng ta có $\Delta x_n = x_{n+1} - x_n$.

Nhận xét.

(i) Cho hàm $f(x), n = 0, 1, 2, ...,$

$$f(x+n) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \Delta^k f(x);$$

trong trường hợp đặc biệt, nếu $\Delta^m f(n)$ là hằng số khác 0 với mỗi số nguyên dương n thì

$$f(n) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \Delta^k f(0).$$

(ii) Nếu $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$, với $a_n \neq 0$ thì với mọi x, ta có:

$$\Delta_h^n P(x) = a_n n! h^n$$

và

$$\Delta_h^m P(x) = 0, \text{ với } m > n.$$

Với k là một số nguyên dương cho trước. Như một hàm của x, C_x^k có các tính chất:

(a) $C_x^{k-1} + C_x^k = C_{x+1}^k$ (vì $\Delta C_x^k = C_x^{k-1}$).

(b) Ta có $\Delta^r C_x^k = C_x^{k-r}$, với $0 \leqslant r \leqslant k$ và $\Delta^r C_x^k = 0$, với $r > k$.

(c) $C_1^k + C_2^k + ... + C_n^k = C_{n+1}^{k+1}$.

Tương tự (i), nếu $f(x)$ là đa thức có bậc m thì

$$f(x) = \sum_{k=0}^{m} C_x^k \Delta^k f(0). \tag{1.2}$$

1.2 Một số tính chất của toán tử sai phân

Tính chất 1.2.1. [4]. Nếu $c = const$ thì $\Delta c = 0$.

Chứng minh. Nếu $c = const$ thì $\Delta c = c - c = 0$. □

Tính chất 1.2.2. [4]. Ta có $\Delta^n(x^n) = n!h^n; \Delta^m(x^n) = 0 (m > n)$.

Chứng minh. Ta có

$$\begin{aligned}\Delta(x^n) &= (x+h)^n - x^n \\ &= n.hx^{n-1} + ... \\ \Delta^2(x^n) &= \Delta(nx^{n-1}h) + ... \\ &= n.h\Delta(x^{n-1}) + ...n(n-1).h^2(x^{n-2}) + ... \\ &... \\ \Delta^n(x^n) &= n!h^n.\end{aligned}$$

Từ Tính chất 1.4.2, suy ra $\Delta^m(x^n) = 0, \forall m > n$.

Tính chất 1.2.3. [4]. Nếu $P(x)$ là đa thức bậc n ta có:

$$\begin{aligned}\Delta P(x) &= P(x+h) - P(x) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{h^i}{i!}.p^{(i)}(x).\end{aligned}$$

Tính chất 1.2.4. [4].

$$f(x+nh) = \sum_{i=0}^{n} C_n^i \Delta^i f(x).$$

Chứng minh. Ta có $f(x+h) = (1+\Delta)f(x) = f(x) + \Delta f(x)$.

Sử dụng liên tiếp công thức trên, ta được:

$$\begin{aligned}f(x+nh) &= (1+\Delta)f(x+(n-1)h) \\ &= (1+\Delta)^2 f(x+(n-2)h) \\ &= ... \\ &= (1+\Delta)^n f(x) \\ &= \sum_{i=0}^{n} C_n^i \Delta^i f(x).\end{aligned}$$

□

Tính chất 1.2.5. [4].

$$\Delta^n f(x) = \sum_{i=0}^{n} C_n^i (-1)^i C_i^n f(x + (n-i)h).$$

Chứng minh. Ta có

$$\begin{aligned}
\Delta^n f(x) &= [(1+\Delta) - 1]^n f(x) \\
&= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i C_i^n (1+\Delta)^{n-i} f(x) \\
&= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i C_i^n f(x + (n-i)h).
\end{aligned}$$

□

Tính chất 1.2.6. [4]. Giả sử $f \in C^n[a;b]$ và $(x; x+nh) \subset \theta(0;1)$, khi đó:

$$\frac{\Delta^n f(x)}{h^n} = f^{(n)}(x + \theta nh); \theta \in (0;1).$$

Chứng minh. Ta chứng minh bằng quy nạp. Với $n = 1$, ta có công thức số gia hữu hạn:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x + \theta h).$$

Giả sử công thức đúng với $k = n$, nghĩa là:

$$\frac{\Delta^n f(x)}{h^n} = f^{(n)}(x + \theta nh).$$

Ta chứng minh công thức trên đúng với $k = n + 1$.

Thật vậy, ta có:

$$\Delta^{n+1} f(x) = \Delta[\Delta^n f(x)] = \Delta[h^n f^{(n)}(x + \theta' nh)],$$

trong đó $\theta' \in (0;1)$.

Áp dụng công thức số gia hữu hạn cho $f^{(n)}(x + \theta' nh)$ ta có

$$\begin{aligned}
\Delta^{n+1} f(x) &= h^n \Delta^{(n)}(x + \theta' nh) \\
&= h^n [f^{(n)}(x + \theta' nh + h) - f^{(n)}(x + \theta' nh)] \\
&= h^{(n+1)} f^{(n+1)}(x + \theta' nh + \theta" h);\ \text{với } (\theta', \theta" \in (0;1)).
\end{aligned}$$

Đặt $\theta = \frac{\theta' n + \theta"}{n+1} \in (0;1)$, ta có

$$\Delta^{(n+1)} f(x) = f^{(n+1)}(x + \theta(n+1)h).$$

□